Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, № 3 (96), 2016

УДК 519.852

Методы построения оптимальных параметров целевой функции в неоднородных сетевых задачах линейной оптимизации с неточными данными

Л.А. Пилипчук

Рассматриваются математические модели экстремальных сетевых задач линейного программирования, параметры целевых функций которых являются неточными данными. Исследуемые задачи линейной оптимизации в конечномерных пространствах характеризуются некоторым числом фиксированных входных параметров (коэффициентов целевой функции, матриц ограничений, правых и левых частей ограничений), которые определяют структуру решаемой задачи. С целью определения оптимальных значений параметров целевой функции, для которых заданное допустимое решение является оптимальным, предлагается математическая модель обратной задачи оптимизации в соответствии с выбранной нормой. В результате решения обратной задачи определяются значения изменений коэффициентов целевой функции. На основе полученных изменений параметров целевой функции формируются новые коэффициенты целевой функции, для которых заданное допустимое решение является оптимальным.
Ключевые слова: линейная оптимизация, целевая функция, двойственная задача, обратная задача, сеть, поток, допустимое решение, оптимальное решение, оптимальное решение, норма.

Mathematical models of extreme network problems of linear programming, the parameters of target functions of which are inaccurate data are considered. The investigated linear optimization problem in finite-dimensional space is characterized by a number of fixed input parameters (coefficients of the objective function, constraint matrices, the right and left parts of the restrictions) that define the structure of the solved problem. In order to determine the optimal values of the parameters of the objective function for which the feasible solution is optimal, the mathematical model of the inverse optimization problem is offered in accordance with the selected norm. As a result of solving the inverse problem the changes of coefficients for the objective function are determined. On the basis of changes in the parameters of the objective function such coefficients of the objective function are formed for which the given feasible solution is optimal solution.
Keywords: linear optimization, objective function, dual problem, inverse problem, network, flow, feasible solution, optimal solution, optimal parameters, norm.

1. Математическая модель прямой задачи. Рассмотрим математическую модель неоднородной сетевой задачи линейной оптимизации следующего вида

$$f(x) = \sum_{(i,j)\in U} \sum_{k\in K(i,j)} c_{ij}^k x_{ij}^k \to \min, \tag{1}$$

$$\sum_{j\in I_i^+(U^k)} x_{ij}^k - \sum_{j\in I_i^-(U^k)} x_{ji}^k = a_i^k, i\in I^k, k\in K, \tag{2}$$

$$\sum_{(i,j)\in U} \sum_{k\in K(i,j)} \lambda_{ij}^{kp} x_{ij}^k = \alpha_p, \quad p = \overline{1,l}, \tag{3}$$

$$\sum_{k\in K_0(i,j)} x_{ij}^k \le d_{ij}^0, \;\; x_{ij}^k \ge 0, k\in K_0(i,j), (i,j)\in U_0, \tag{4}$$

$$0 \le x_{ij}^k \le d_{ij}^k, \;\; k\in K_1(i,j), (i,j)\in U, \tag{5}$$

$$x_{ij}^k \ge 0, \; k\in K(i,j)\setminus K_1(i,j), (i,j)\in U\setminus U_0, \tag{6}$$

где множество мультидуг U определено на $I\times I$ $(|I|<\infty, |U|<\infty)$. Мультисеть $G = I,U$ представлена в виде множества $|K|$ связных сетей $G^k = (I^k, U^k)$ $k\in K = 1,2,...$, $|K|<\infty$. Каждая связная сеть $G^k = (I^k, U^k)$ соответствует некоторому типу k потока в мультисети $G = I,U$. Определим для каждого узла $i\in I$ мультисети G множество типов потоков $K(i) = k\in K : i\in I^k$, проходящих через узел $i\in I$. Для каждой мультидуги $(i,j)\in U$ определим множество типов потоков $K(i,j) = k\in K : (i,j)\in \tilde{U}^k$, проходящих через мультидугу $(i,j)\in U$. Для каждой мультидуги (i,j)

определим подмножество $K_1(i,j) \subseteq K(i,j)$. Обозначим через U_0 множество мультидуг $(i,j) \in U_0$, $U_0 \subseteq U$, для которого выполняются неравенства: $|K_0(i,j)| > 1$, где $K_0(i,j) = K(i,j) \setminus K_1(i,j)$, $(i,j) \in U_0$. Каждая сеть $G^k = I^k, U^k$ имеет следующие характеристики: x_{ij}^k – дуговой поток k-го типа по мультидуге $(i,j) \in U$; d_{ij}^k – пропускная способность дуги $(i,j)^k$ для k-го типа потока, $k \in K_1(i,j)$; d_{ij}^0 – пропускная способность мультидуги (i,j), $(i,j) \in U_0$; $I_i^+(U^k) = j \in I^k : (i,j)^k \in U^k$, $I_i^-(U^k) = j \in I^k : (j,i)^k \in U^k$; a_i^k – интенсивность узла i для k-го типа потока; λ_{ij}^{kp} – коэффициенты матрицы ограничений (3); α_p, $p = \overline{1,l}$ – параметры правых частей ограничений (3).

Экстремальная задача (1)–(6) относится к классу конечномерных сетевых задач линейной оптимизации. Для известных значений параметров указанного класса задач в [1] разработана конструктивная теория построения оптимальных решений, в которой учитываются типы разреженности систем линейных алгебраических уравнений, результаты теории потоков и теории графов, а также современные технологии численного решения сетевых задач линейной оптимизации на основе применения алгоритмов декомпозиции ограничений.

Если некоторые входные параметры конечномерных задач линейной оптимизации являются неточными данными [2], то могут быть применены принципы обратной оптимизации [3]–[5] для их корректировки. Для определения изменений параметров целевой функции (1) с целью определения их оптимальных значений $\tilde{c}_{ij}^k, (i,j) \in U,\ k \in K(i,j)$, для которых заданное допустимое решение $x^0 \in Z$ задачи (1)–(6) является оптимальным, предлагается математическая модель обратной задачи оптимизации в соответствии с выбранной нормой, где $x^0 = (x_{ij}^{k0}, (i,j) \in U, k \in K(i,j))$, Z – множество допустимых решений задачи (1)–(6). В обратной задаче необходимо скорректировать параметры целевой функции (1) (вектор стоимости $c = (c_{ij}^k, (i,j) \in U, k \in K(i,j))$) таким образом, чтобы допустимое решение x^0 задачи (1)–(6) стало оптимальным решением скорректированной задачи с новыми значениями $\tilde{c}_{ij}^k, (i,j) \in U,\ k \in K(i,j)$ компонент вектора стоимости. Построение параметров $\tilde{c}_{ij}^k, (i,j) \in U,\ k \in K(i,j)$ выполняется в виде:

$$\tilde{c}_{ij}^k = c_{ij}^k + \alpha_{ij}^k - \beta_{ij}^k,\ \alpha_{ij}^k \ge 0,\ \beta_{ij}^k \ge 0,$$

где α_{ij}^k и β_{ij}^k – соответственно увеличение и уменьшение каждого параметра c_{ij}^k целевой функции (1). При этом α_{ij}^k и β_{ij}^k не могут быть одновременно положительными: $\alpha_{ij}^k \beta_{ij}^k = 0$.

С целью определения оптимальных параметров $\tilde{c}_{ij}^k, (i,j) \in U,\ k \in K(i,j)$ целевой функции необходимо построить двойственную задачу к задаче (1)–(6).

2. Двойственная задача. Двойственная задача к задаче (1)–(6) имеет вид:

$$g(u,r,v,w) = \sum_{k \in K} \sum_{i \in I^k} a_i^k u_i^k + \sum_{p=1}^{l} \alpha_p r_p - \sum_{(i,j) \in U_0} d_{ij}^0 v_{ij} - \sum_{(i,j) \in U} \sum_{k \in K_1(i,j)} d_{ij}^k w_{ij}^k \to \max, \tag{7}$$

$$u_i^k - u_j^k + \sum_{p=1}^{l} \lambda_{ij}^{kp} r_p - v_{ij} \le c_{ij}^k, \quad v_{ij} \ge 0, \quad k \in K_0(i,j), (i,j) \in U_0, \tag{8}$$

$$u_i^k - u_j^k + \sum_{p=1}^{l} \lambda_{ij}^{kp} r_p - w_{ij}^k \le c_{ij}^k, \quad w_{ij}^k \ge 0, \quad k \in K_1(i,j), (i,j) \in U, \tag{9}$$

$$u_i^k - u_j^k + \sum_{p=1}^{l} \lambda_{ij}^{kp} r_p \le c_{ij}^k, \quad k \in K(i,j) \setminus K_1(i,j), (i,j) \in U \setminus U_0, \tag{10}$$

где вектор λ – допустимое решение двойственной задачи (7)–(10),

$$\lambda = (u_i^k, k \in K, i \in I^k; r_p, p = \overline{1,l}; v_{ij} \ge 0, (i,j) \in U_0; w_{ij}^k \ge 0, (i,j) \in U, k \in K_1(i,j)), \lambda \in \Lambda,$$

Λ – множество допустимых решений двойственной задачи (7)–(10). Компоненты вектора $\lambda \in \Lambda$ удовлетворяют ограничениям (8)–(10).

Предположим, что допустимое решение x^0 задачи (1)–(6) не является оптимальным решением. На основании результатов из теории двойственности легко доказать теорему 1:

Теорема 1. *Если* x^0 *– допустимое решение прямой задачи (1)–(6),* $\lambda^0=(u^0,r^0,v^0,w^0)$ *– допустимое решение задачи (7)–(10), которая является двойственной к задаче (1)–(6), где* $u^0=(u_i^{k0},k\in K,i\in I^k)$, $r^0=(r_p^0,p=\overline{1,l})$, $v^0=(v_{ij}^0,(i,j)\in U_0)$, $w^0=(w_{ij}^{k0},(i,j)\in U,k\in K_1(i,j))$ *и выполняется равенство*

$$f(x^0)=g(u^0,r^0,v^0,w^0),$$

то x^0 *– оптимальное решение задачи (1)–(6),* λ^0 *– оптимальное решение двойственной задачи (7)–(10).*

Теорема 2. *Пусть* $x^0=(x_{ij}^{k0},(i,j)\in U,k\in K(i,j))$ *– допустимое решение задачи (1)–(6). Если компоненты вектора* $\lambda=(u,r,v,w)$, *где*

$$u=(u_i^k,k\in K,i\in I^k),\ \ r=(r_p,p=\overline{1,l}),\ \ v=(v_{ij},(i,j)\in U_0),\ \ w=(w_{ij}^k,(i,j)\in U,\ k\in K_1(i,j))$$

для всех $(i,j)\in U$, *удовлетворяют условиям:*

$$\begin{cases} u_i^k-u_j^k+\sum_{p=1}^{l}\lambda_{ij}^{kp}r_p-v_{ij}\le c_{ij}^k, \quad v_{ij}\ge 0, \quad k\in K_0(i,j),(i,j)\in U_0;\\ u_i^k-u_j^k+\sum_{p=1}^{l}\lambda_{ij}^{kp}r_p-w_{ij}^k\le c_{ij}^k, \quad w_{ij}^k\ge 0, \quad k\in K_1(i,j),(i,j)\in U;\\ u_i^k-u_j^k+\sum_{p=1}^{l}\lambda_{ij}^{kp}r_p\le c_{ij}^k, \quad k\in K(i,j)\setminus K_1(i,j),(i,j)\in U\setminus U_0; \end{cases} \tag{11}$$

$$\begin{cases} (u_i^k-u_j^k+\sum_{p=1}^{l}\lambda_{ij}^{kp}r_p-v_{ij}-c_{ij}^k)x_{ij}^{k0}=0, \quad k\in K_0(i,j),(i,j)\in U_0;\\ (u_i^k-u_j^k+\sum_{p=1}^{l}\lambda_{ij}^{kp}r_p-w_{ij}^k-c_{ij}^k)x_{ij}^{k0}=0, \quad k\in K_1(i,j),(i,j)\in U;\\ (u_i^k-u_j^k+\sum_{p=1}^{l}\lambda_{ij}^{kp}r_p-c_{ij}^k)x_{ij}^{k0}=0, \quad k\in K(i,j)\setminus K_1(i,j),(i,j)\in U\setminus U_0, \end{cases} \tag{12}$$

$$(d_{ij}^0-\sum_{k\in K_0(i,j)}x_{ij}^{k0})v_{ij}=0,(i,j)\in U_0, \tag{13}$$

$$(d_{ij}^k-x_{ij}^{k0})w_{ij}^k=0,k\in K_1(i,j),(i,j)\in U, \tag{14}$$

то $x^0=(x_{ij}^{k0},(i,j)\in U,k\in K(i,j))$ *– оптимальное решение задачи (1)–(6).*

Доказательство. Поскольку компоненты вектора $\lambda\in\Lambda$,

$$\lambda=(u_i^k,k\in K,i\in I^k;r_p,p=\overline{1,l};v_{ij},(i,j)\in U_0;w_{ij}^k,(i,j)\in U,k\in K_1(i,j))$$

для всех $(i,j)\in U$ удовлетворяют условиям (11), то вектор λ – допустимое решение двойственной задачи (7)–(10). Для любого допустимого решения $x^0\in Z$ прямой задачи (1)–(6) и любого допустимого решения $\lambda\in\Lambda$ двойственной задачи (7)–(10) справедливо неравенство:

$$\sum_{(i,j)\in U}\sum_{k\in K(i,j)}c_{ij}^kx_{ij}^{k0}\ge\sum_{k\in K}\sum_{i\in I^k}a_i^ku_i^k+\sum_{p=1}^{l}\alpha_pr_p-\sum_{(i,j)\in U_0}d_{ij}^0v_{ij}-\sum_{(i,j)\in U}\sum_{k\in K_1(i,j)}d_{ij}^kw_{ij}^k.$$

Вычислим значение целевой функции (1) на допустимом решении $x^0=(x_{ij}^{k0},(i,j)\in U,k\in K(i,j))$ задачи (1)–(6). С учетом (12)–(14) имеем:

$$f(x^0)=\sum_{(i,j)\in U}\sum_{k\in K(i,j)}c_{ij}^kx_{ij}^{k0}=\sum_{(i,j)\in U_0}\sum_{k\in K_0(i,j)}c_{ij}^kx_{ij}^{k0}+\sum_{(i,j)\in U}\sum_{k\in K_1(i,j)}c_{ij}^kx_{ij}^{k0}+\sum_{(i,j)\in U\setminus U_0}\sum_{k\in K(i,j)\setminus K_1(i,j)}c_{ij}^kx_{ij}^{k0}=$$

$$=\sum_{(i,j)\in U_0}\sum_{k\in K_0(i,j)}(u_i^k-u_j^k+\sum_{p=1}^{l}\lambda_{ij}^{kp}r_p-v_{ij})x_{ij}^{k0}+\sum_{(i,j)\in U}\sum_{k\in K_1(i,j)}(u_i^k-u_j^k+\sum_{p=1}^{l}\lambda_{ij}^{kp}r_p-w_{ij}^k)x_{ij}^{k0}+$$

$$+\sum_{(i,j)\in U\setminus U_0}\sum_{k\in K(i,j)\setminus K_1(i,j)}(u_i^k-u_j^k+\sum_{p=1}^{l}\lambda_{ij}^{kp}r_p)x_{ij}^{k0}=$$

$$=\sum_{k\in K}\sum_{i\in I^k}u_i^k(\sum_{j\in I_i^+(U^k)}x_{ij}^{k0}-\sum_{j\in I_i^-(U^k)}x_{ji}^{k0})+\sum_{p=1}^{l}r_p(\sum_{(i,j)\in U}\sum_{k\in K(i,j)}\lambda_{ij}^{kp}x_{ij}^{k0})-$$

$$-\sum_{(i,j)\in U_0}v_{ij}\sum_{k\in K_0(i,j)}x_{ij}^{k0}-\sum_{(i,j)\in U}\sum_{k\in K_1(i,j)}w_{ij}^kx_{ij}^{k0}=$$

$$=\sum_{k\in K}\sum_{i\in I^k}a_i^ku_i^k+\sum_{p=1}^{l}\alpha_pr_p-\sum_{(i,j)\in U_0}d_{ij}^0v_{ij}-\sum_{(i,j)\in U}\sum_{k\in K_1(i,j)}d_{ij}^kw_{ij}^kf(x^0)=g(u,r,v,w)\le\sum_{(i,j)\in U}\sum_{k\in K(i,j)}c_{ij}^kx_{ij}^{k0}\ .$$

Поскольку $f(x^0)=g(u,r,v,w)$, то по теореме 1, $x^0=(x_{ij}^{k0},(i,j)\in U,k\in K(i,j))$ – оптимальное решение задачи (1)–(6). Теорема 2 доказана.

3. Математическая модель обратной задачи: построение оптимальных параметров целевой функции. Для задачи (1)–(6) построим математическую модель обратной задачи. По теореме 2, в обратной задаче оптимизации необходимо скорректировать вектор стоимости $c=(c_{ij}^k,(i,j)\in U,k\in K(i,j))$ задачи (1)–(6) таким образом, чтобы допустимое решение $x^0\in Z$ задачи (1)–(6) стало оптимальным решением скорректированной задачи с новыми значениями компонент вектора стоимости. Заменим в ограничениях (8)–(10) двойственной задачи (7)–(10) каждую компоненту c_{ij}^k вектора стоимости $c=(c_{ij}^k,(i,j)\in U,\ k\in K(i,j))$ на соответствующую компоненту $\tilde{c}_{ij}^k$ вектора $\tilde{c}=(\tilde{c}_{ij}^k,(i,j)\in U,k\in K(i,j))$. В соответствии с нормой l_1,

$$l_1=\|\tilde{c}-c\|_1=\sum_{(i,j)\in U}\sum_{k\in K(i,j)}\left|\tilde{c}_{ij}^k-c_{ij}^k\right|=\sum_{(i,j)\in U}\sum_{k\in K(i,j)}\left|\alpha_{ij}^k-\beta_{ij}^k\right|=\sum_{(i,j)\in U}\sum_{k\in K(i,j)}(\alpha_{ij}^k+\beta_{ij}^k),\tag{15}$$

определим такие векторы $\alpha=(\alpha_{ij}^k,(i,j)\in U,k\in K(i,j))$, $\beta=(\beta_{ij}^k,(i,j)\in U,k\in K(i,j))$, что допустимое решение $x^0\in Z$ задачи (1)–(6) становится оптимальным решением экстремальной задачи с целевой функцией $\sum_{(i,j)\in U}\sum_{k\in K(i,j)}(c_{ij}^k+\alpha_{ij}^k-\beta_{ij}^k)x_{ij}^{k0}$ и ограничениями (2)–(6).

По теореме 2 для некоторого вектора $\lambda\in\Lambda$ и вектора стоимости $\tilde{c}=(\tilde{c}_{ij}^k,(i,j)\in U,k\in K(i,j))$ выполняются соотношения:

$$\begin{cases} u_i^k-u_j^k+\sum_{p=1}^{l}\lambda_{ij}^{kp}r_p-v_{ij}\le\tilde{c}_{ij}^k, \quad v_{ij}\ge 0, \quad k\in K_0(i,j),(i,j)\in U_0;\\ u_i^k-u_j^k+\sum_{p=1}^{l}\lambda_{ij}^{kp}r_p-w_{ij}^k\le\tilde{c}_{ij}^k, \quad w_{ij}^k\ge 0, \quad k\in K_1(i,j),(i,j)\in U;\\ u_i^k-u_j^k+\sum_{p=1}^{l}\lambda_{ij}^{kp}r_p\le\tilde{c}_{ij}^k, \quad k\in K(i,j)\setminus K_1(i,j),(i,j)\in U\setminus U_0; \end{cases}\tag{16}$$

Поскольку допустимое решение x^0 задачи (1)–(6) определено, то в зависимости от значений дуговых потоков $x_{ij}^{k0},(i,j)\in U_0,\ k\in K_0(i,j)$ определим множества:

$$B_1=\left\{(i,j)^k,(i,j)\in U_0,k\in K_0(i,j):\sum_{k\in K_0(i,j)}x_{ij}^{k0}=d_{ij}^0,\quad x_{ij}^{k0}=0\right\},$$

$$B_2=\left\{(i,j)^k,(i,j)\in U_0,k\in K_0(i,j):\sum_{k\in K_0(i,j)}x_{ij}^{k0}=d_{ij}^0,\quad x_{ij}^{k0}\ne 0\right\},$$

$$B_3=\left\{(i,j)^k,(i,j)\in U_0,k\in K_0(i,j):\sum_{k\in K_0(i,j)}x_{ij}^{k0}<d_{ij}^0,\quad x_{ij}^{k0}=0\right\},$$

$$B_4=\left\{(i,j)^k,(i,j)\in U_0,k\in K_0(i,j):\sum_{k\in K_0(i,j)}x_{ij}^{k0}<d_{ij}^0,\quad x_{ij}^{k0}\ne 0\right\}.$$

В зависимости от значений дуговых потоков для дуг $(i,j)^k,k\in K_0(i,j),(i,j)\in U_0$ соотношения (16) примут вид:

$$\begin{gathered} u_i^k-u_j^k+\sum_{p=1}^{l}\lambda_{ij}^{kp}r_p-v_{ij}\le c_{ij}^k+\alpha_{ij}^k-\beta_{ij}^k,v_{ij}\ge 0,(i,j)^k\in B_1,\\ u_i^k-u_j^k+\sum_{p=1}^{l}\lambda_{ij}^{kp}r_p-v_{ij}=c_{ij}^k+\alpha_{ij}^k-\beta_{ij}^k,v_{ij}\ge 0,(i,j)^k\in B_2,\\ u_i^k-u_j^k+\sum_{p=1}^{l}\lambda_{ij}^{kp}r_p\le c_{ij}^k+\alpha_{ij}^k-\beta_{ij}^k,(i,j)^k\in B_3,\\ u_i^k-u_j^k+\sum_{p=1}^{l}\lambda_{ij}^{kp}r_p=c_{ij}^k+\alpha_{ij}^k-\beta_{ij}^k,(i,j)^k\in B_4. \end{gathered}\tag{17}$$

В зависимости от значений дуговых потоков $x_{ij}^{k0},(i,j)\in U,\ k\in K_1(i,j)$ определим множества R_1,R_2,R_3:

$$R_1=\{(i,j)^k,k\in K_1(i,j),(i,j)\in U:\ x_{ij}^{k0}=0\},\quad R_2=\{(i,j)^k,k\in K_1(i,j),(i,j)\in U:\ x_{ij}^{k0}=d_{ij}^k\},$$

$$R_3=\{(i,j)^k,k\in K_1(i,j),(i,j)\in U:\ 0<x_{ij}^{k0}<d_{ij}^k\}.$$

В результате разбиения значений дуговых потоков $x_{ij}^{k0}, (i,j) \in U,\ k \in K_1(i,j)$ на множества R_1, R_2, R_3 для дуг $(i,j)^k, k \in K_1(i,j), (i,j) \in U$ соотношения (16) примут вид:

$$
\begin{aligned}
&u_i^k - u_j^k + \sum_{p=1}^{l} \lambda_{ij}^{kp} r_p \le c_{ij}^k + \alpha_{ij}^k - \beta_{ij}^k, (i,j)^k \in R_1,\\
&u_i^k - u_j^k + \sum_{p=1}^{l} \lambda_{ij}^{kp} r_p - w_{ij}^k = c_{ij}^k + \alpha_{ij}^k - \beta_{ij}^k, w_{ij}^k \ge 0, (i,j)^k \in R_2,\\
&u_i^k - u_j^k + \sum_{p=1}^{l} \lambda_{ij}^{kp} r_p = c_{ij}^k + \alpha_{ij}^k - \beta_{ij}^k, (i,j)^k \in R_3,
\end{aligned} \tag{18}
$$

В зависимости от значений заданного допустимого решения x^0 задачи (1)–(6) для дуг $(i,j)^k,\ k \in K(i,j) \setminus K_1(i,j), (i,j) \in U \setminus U_0$ построим множества:

$$L_1 = \{(i,j)^k, k \in K(i,j) \setminus K_1(i,j), (i,j) \in U \setminus U_0 : x_{ij}^{k0} = 0\},$$
$$L_2 = \{(i,j)^k, k \in K(i,j) \setminus K_1(i,j), (i,j) \in U \setminus U_0 : x_{ij}^{k0} > 0\}.$$

В зависимости от разбиения дуг $(i,j)^k, k \in K(i,j) \setminus K_1(i,j), (i,j) \in U \setminus U_0$ на множества L_1, L_2 соотношения (16) имеют следующий вид:

$$
\begin{aligned}
&u_i^k - u_j^k + \sum_{p=1}^{l} \lambda_{ij}^{kp} r_p \le c_{ij}^k + \alpha_{ij}^k - \beta_{ij}^k, (i,j)^k \in L_1,\\
&u_i^k - u_j^k + \sum_{p=1}^{l} \lambda_{ij}^{kp} r_p = c_{ij}^k + \alpha_{ij}^k - \beta_{ij}^k, (i,j)^k \in L_2.
\end{aligned} \tag{19}
$$

Для компонент векторов $\alpha = (\alpha_{ij}^k, (i,j) \in U, k \in K(i,j))$ и $\beta = (\beta_{ij}^k, (i,j) \in U, k \in K(i,j))$ выполнены соотношения:

$$\alpha_{ij}^k \ge 0, \beta_{ij}^k \ge 0, (i,j) \in U, k \in K(i,j). \tag{20}$$

Обратная задача состоит в минимизации целевой функции

$$h(\alpha,\beta) = \sum_{(i,j)\in U} \sum_{k \in K(i,j)} (\alpha_{ij}^k + \beta_{ij}^k) \to \min \tag{21}$$

при ограничениях (17)–(20). В результате решения экстремальной задачи (17)–(21) определены численные значения компонент векторов $\alpha = (\alpha_{ij}^k, (i,j) \in U, k \in K(i,j))$ и $\beta = (\beta_{ij}^k, (i,j) \in U, k \in K(i,j))$, необходимые для вычисления оптимальных параметров $\tilde{c}_{ij}^k = c_{ij}^k + \alpha_{ij}^k - \beta_{ij}^k, (i,j) \in U,\ k \in K(i,j)$. Для вектора стоимости $\tilde{c} = (\tilde{c}_{ij}^k, (i,j) \in U, k \in K(i,j))$ допустимое решение $x^0 = (x_{ij}^{k0}, (i,j) \in U, k \in K(i,j)),\ x^0 \in Z$ задачи (1)–(6) является оптимальным решением экстремальной задачи с целевой функцией

$$\sum_{(i,j)\in U} \sum_{k \in K(i,j)} (c_{ij}^k + \alpha_{ij}^k - \beta_{ij}^k) x_{ij}^{k0} \to \min$$

и ограничениями (2)–(6).

Литература

1. Пилипчук, Л.А. Линейные неоднородные задачи потокового программирования / Л.А. Пилипчук. – Минск : БГУ, 2009. – 222 с.
2. Фидлер, М. Задачи линейной оптимизации с неточными данными / М. Фидлер, Й. Недома, Я. Рамик, И. Рон, К. Циммерман. – Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2008. – 288 с.
3. Burton, D. On an instance of the inverse shortest paths problem / D. Burton, Ph.L. Toint // Mathematical Programming. – 1992. – Vol. 53, Issue 1. – P. 45–61.
4. Ahuja, R.K. Inverse Optimization / R.K. Ahuja, J.B. Orlin // Operation Research. – 2001. – Vol. 49, Issue 5. – P. 771–783.
5. Jain, S. An Inverse Capacitated Transportation Problem / S. Jain, N. Arya // IOSR Journal of Mathematics. – 2013. – Vol. 5, Issue 4. – P. 24–27.

Белорусский государственный университет
Поступила в редакцию 21.01.2016